Relations métriques

dans le triangle rectangle

Les relations métriques sont des relations qui expriment des liens entre diverses grandeurs d'une figure géométrique.

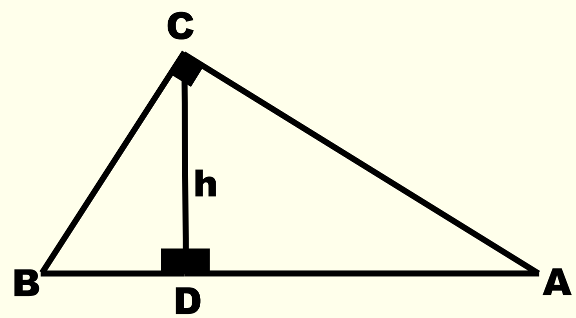
Le triangle rectangle a toujours été un objet de fascination en géométrie. C'est sans doute à cause des nombreuses relations qu'on peut y découvrir.

La plupart peuvent être prouvées à partir des théorèmes de similitude des triangles.

La plus célèbre de ces relations est celle de Pythagore.

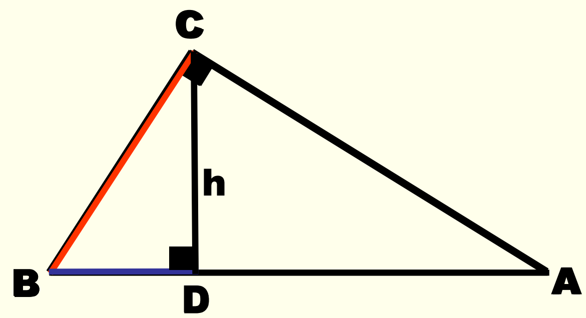
Mais, ce n'est pas la seule...

La hauteur issue de l'angle droit d'un triangle rectangle forme trois triangles semblables.



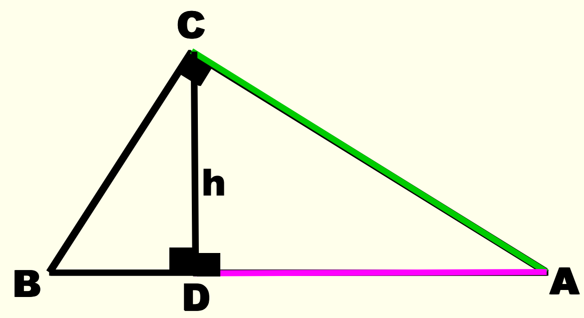
Affirmations	Justifications
Le Δ CDB et le Δ CDA sont rectangles.	Une hauteur est un segment abaissé d'un sommet perpendiculairement sur le côté opposé.

Séparons le Δ CBD et le Δ CBA.

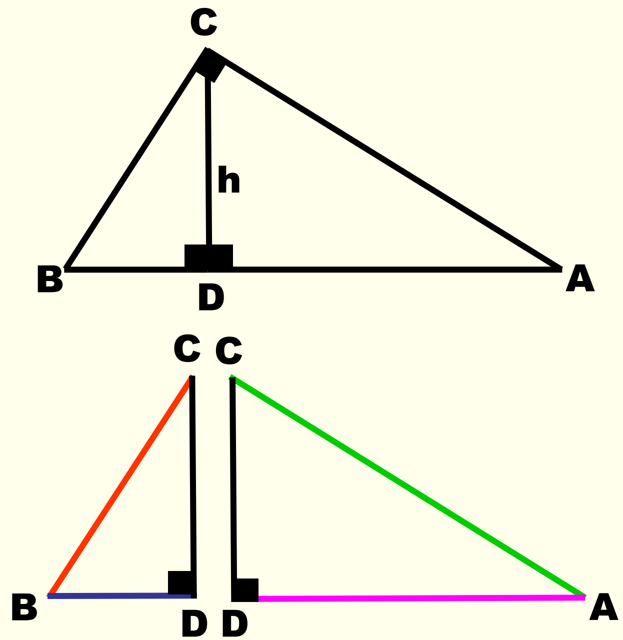


Affirmations	Justifications
1) $\angle$ CDB $\cong$ $\angle$ BCA	1) Ce sont deux angles droits.
2) $\angle$ B $\cong$ $\angle$ B	2) Angle commun aux deux triangles.
3) Δ CBD ~ Δ CBA	3) Propriété AA.

Séparons le Δ CAD et le Δ CBA.

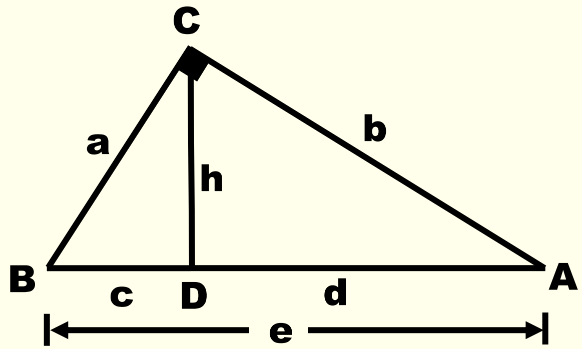


Affirmations	Justifications
1) $\angle$ BCA ≅ $\angle$ CDA	1) Ce sont deux angles droits.
2) $\angle$ A ≅ $\angle$ A	2) Angle commun aux deux triangles.
3) Δ CBA ~ Δ CDA	3) Propriété AA.



Affirmations	Justifications
Δ CBD ~ Δ CBA et Δ CBA ~ Δ CDA, donc Δ CBD ~ Δ CDA	Par la transitivité de la relation de similitude.

À partir de ces cas de similitude des triangles, on peut poser quelques proportions.

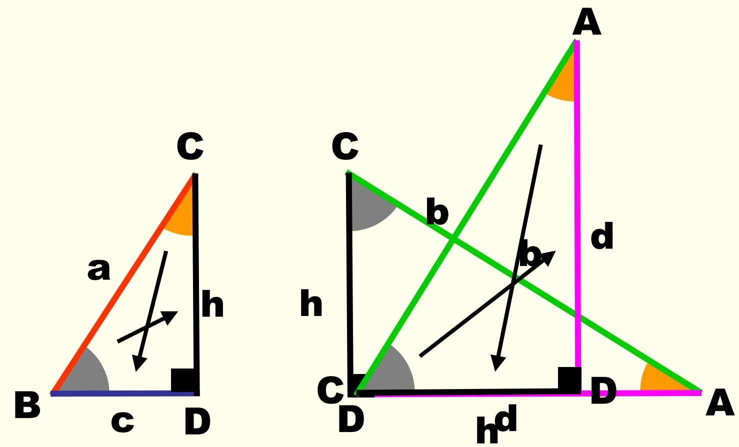


Prenons les deux petits triangles.

Faisons subir une rotation de 90⁰ au triangle CDA.

En utilisant les rapports des côtés homologues, posons la proportion suivante :

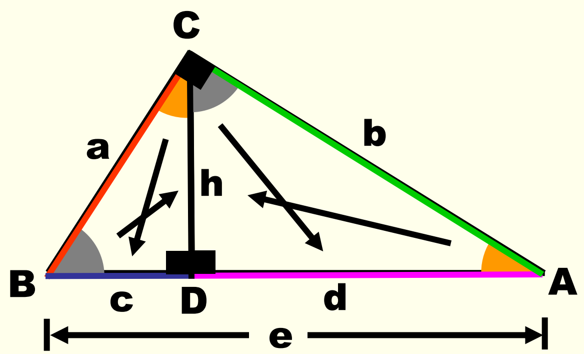
$$\frac{h}{d} = \frac{c}{h}$$



En multipliant les extrêmes entre eux et les moyens entre eux, on obtient :

$$\boxed{h^2 = cd}$$

Replaçons les triangles.

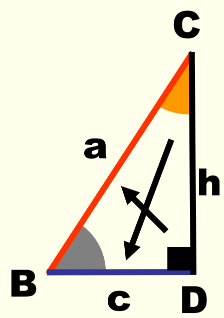


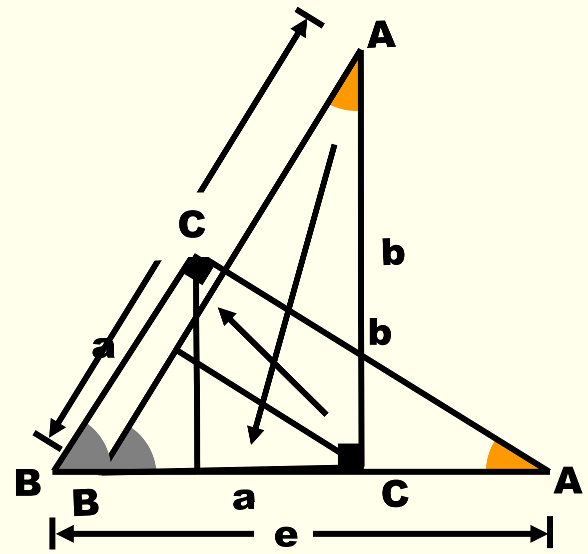
$$\frac{h}{d} = \frac{c}{h}$$

$$\boxed{h^2 = cd}$$

La mesure de la hauteur issue de l’angle droit est moyenne proportionnelle entre les mesures des deux segments qu’elle détermine sur l’hypoténuse.

Comparons le triangle CBD et le triangle CBA.



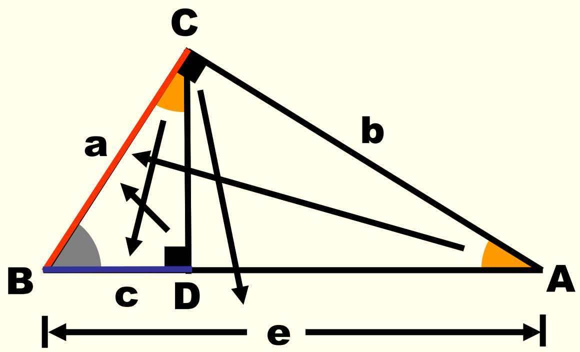


En utilisant les rapports des côtés homologues, posons la proportion suivante :

$$\frac{a}{e} = \frac{c}{a}$$

$$\boxed{a^2 = ce}$$

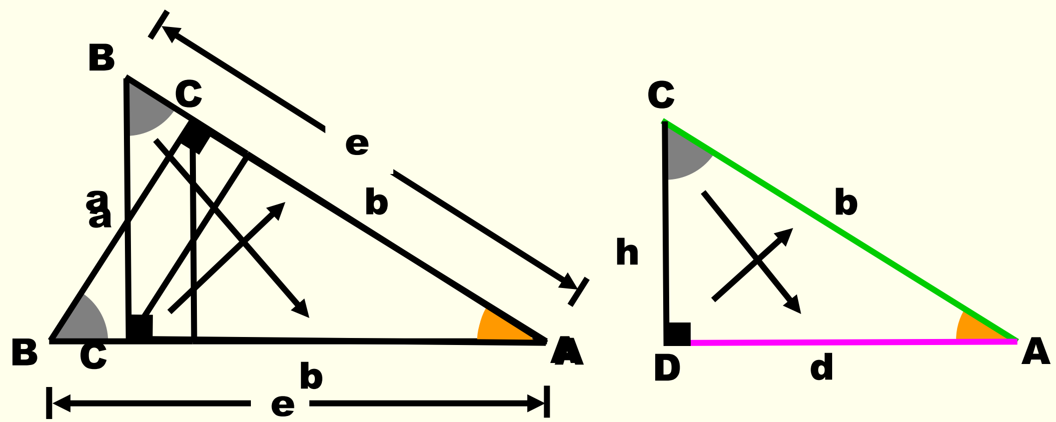
Replaçons les triangles.



$$\frac{a}{e} = \frac{c}{a}$$

$$\boxed{a^2 = ce}$$

Comparons le triangle CBA et le triangle CDA.

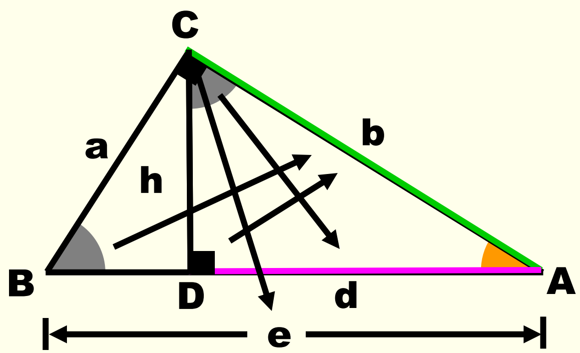


En utilisant les rapports des côtés homologues, posons la proportion suivante :

$$\frac{b}{e} = \frac{d}{b}$$

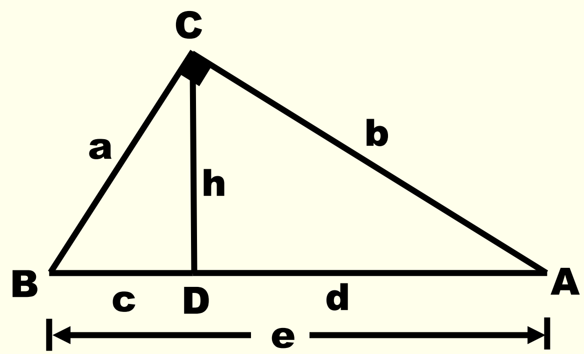
$$\boxed{b^2 = de}$$

Replaçons les triangles.



$$\frac{b}{e} = \frac{d}{b}$$

$$\boxed{b^2 = de}$$



$$\frac{a}{e} = \frac{c}{a}$$

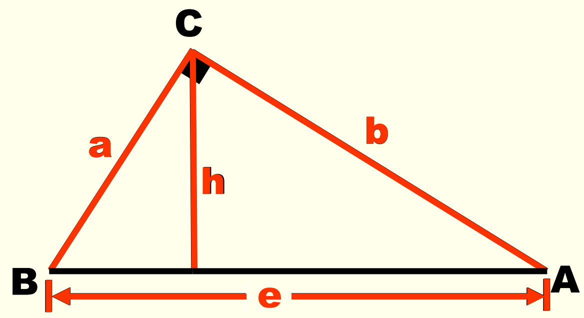
$$\frac{b}{e} = \frac{d}{b}$$

$$\boxed{a^2 = ce}$$

$$\boxed{b^2 = de}$$

La mesure de chaque cathète est moyenne proportionnelle à sa projection sur l'hypoténuse et celle de l'hypoténuse entière.

Le produit des cathètes est égal au produit de la hauteur par l'hypoténuse.



On peut calculer l'aire de ce triangle de deux façons :

$$A = \frac{a \times b}{2} \quad \text{ou} \quad A = \frac{e \times h}{2}$$

Comme les deux formules donnent la même aire, on peut poser :

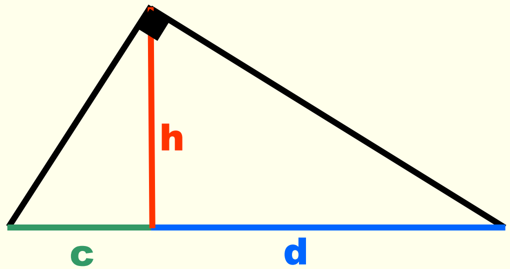
$$A = A$$

$$\frac{a \times b}{2} = \frac{e \times h}{2}$$

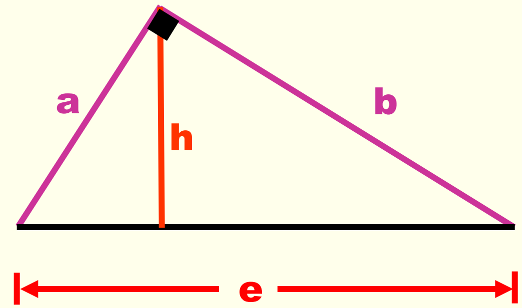
donc, $a \times b = e \times h$

$$\boxed{ab = eh}$$

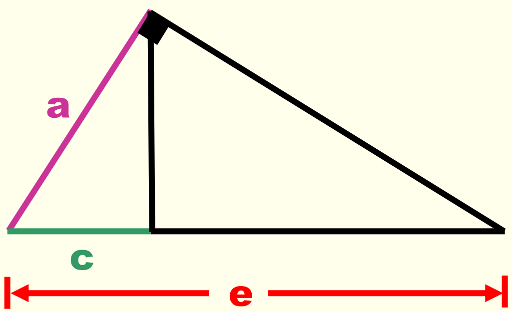
En résumé



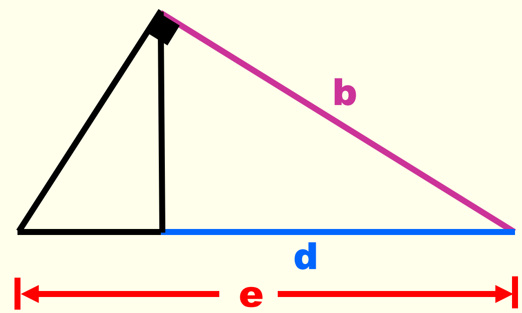
$$\boxed{h^2 = cd}$$



$$\boxed{ab = eh}$$

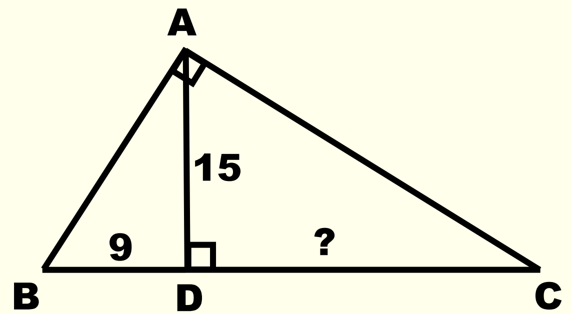


$$\boxed{a^2 = ce}$$



$$\boxed{b^2 = de}$$

Problèmes



Sachant m $\overline{AD}$ = 15 cm et m $\overline{BD}$ = 9 cm, trouve m $\overline{DC}$.

$$(m\ \overline{AD})^2 = m\ \overline{BD} \times m\ \overline{DC}$$

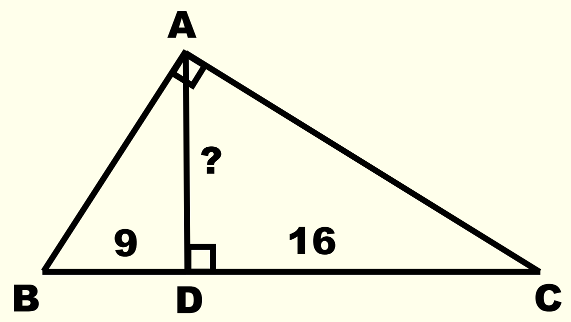
$$15^2 = 9 \times m\ \overline{DC}$$

$$225 = 9 \times m\ \overline{DC}$$

$$\frac{225}{9} = m\ \overline{DC}$$

$$25 = m\ \overline{DC}$$

m $\overline{DC}$ = 25 cm



Sachant m $\overline{BD}$ = 9 cm et m $\overline{DC}$ = 16 cm, trouve m $\overline{AD}$.

$$(m\ \overline{AD})^2 = m\ \overline{BD} \times m\ \overline{DC}$$

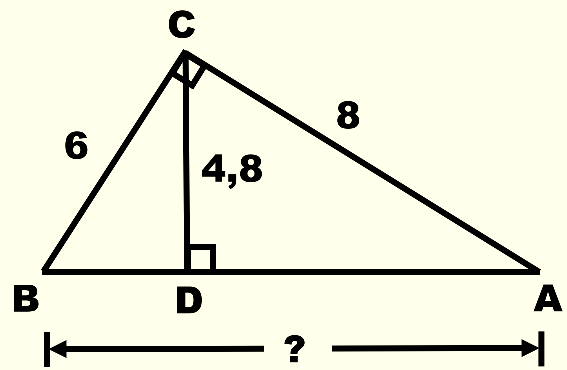
$$(m\ \overline{AD})^2 = 9 \times 16$$

$$(m\ \overline{AD})^2 = 144$$

$$(m\ \overline{AD}) = \sqrt{144} = +12 \text{ et } -12$$

à rejeter

$$m\ \overline{AD} = 12 \text{ cm}$$



Sachant m $\overline{BC}$ = 6 cm, m $\overline{DC}$ = 4,8 cm et m $\overline{CA}$ = 8, trouve m $\overline{AB}$.

$$m\,\overline{BC} \times m\,\overline{CA} = m\,\overline{CD} \times m\,\overline{AB}$$

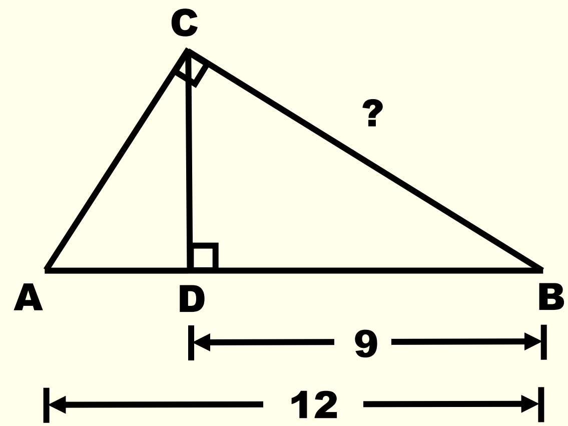
$$6 \times 8 = 4{,}8 \times m\,\overline{AB}$$

$$48 = 4{,}8 \times m\,\overline{AB}$$

$$\frac{48}{4{,}8} = m\,\overline{AB}$$

$$10 = m\,\overline{AB}$$

m $\overline{AB}$ = 10 cm



Sachant m $\overline{BA}$ = 12 cm et m $\overline{BD}$ = 9 cm, trouve m $\overline{CB}$.

$$(m\ \overline{CB})^2 = m\ \overline{BD} \times m\ \overline{BA}$$

$$(m\ \overline{CB})^2 = 9 \times 12$$

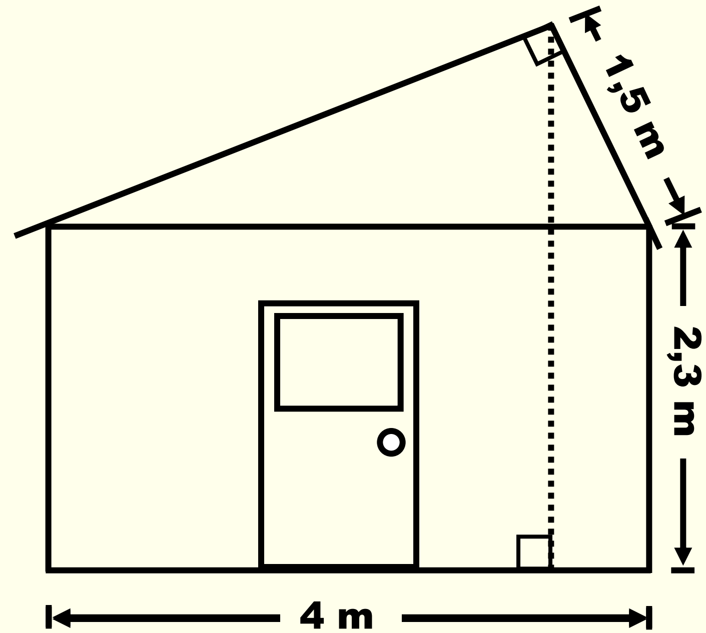
$$(m\ \overline{CB})^2 = 108$$

$$(m\ \overline{CB}) = \sqrt{108} \approx +10{,}39 \text{ et } -10{,}39$$

à rejeter

$$m\ \overline{CB} \approx 10{,}39 \text{ cm}$$

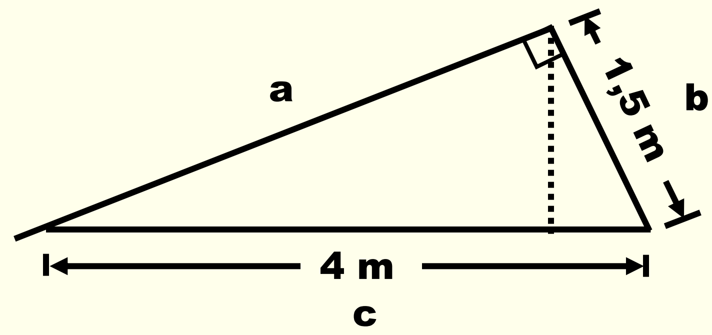
On veut connaître la hauteur du cabanon illustré ci-contre. Les seules mesures dont on dispose sont reportées sur la figure ci-contre.



Quelle est la hauteur maximale de ce cabanon ?

1) Reportons la mesure de 4 m à la base du triangle.

2) Simplifions le dessin en ne considérant que le triangle.



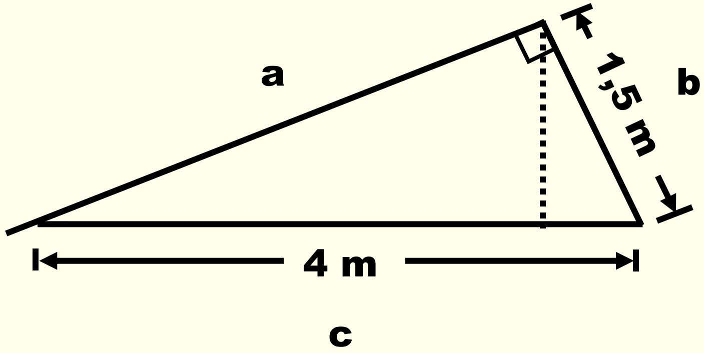
3) Calculons la cathète manquante à l'aide de la relation de Pythagore.

$$a = \sqrt{c^2 - b^2}$$

$$a = \sqrt{4^2 - 1{,}5^2}$$

$$a = \sqrt{16 - 2{,}25}$$

$$a = \sqrt{13{,}75} \approx 3{,}71 \text{ m}$$



4) Utilisons la relation :

$$\boxed{ab = ch}$$

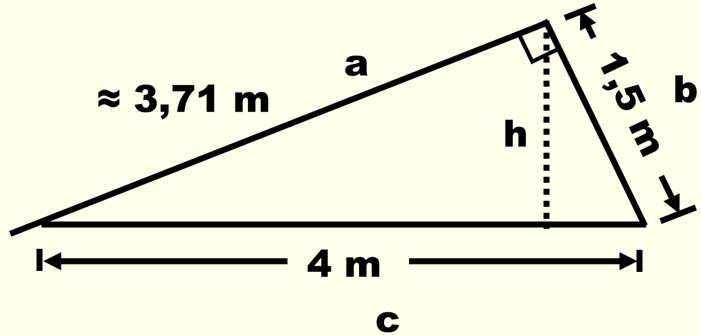
$$3{,}71 \times 1{,}5 \approx 4 \times h$$

$$5{,}565 \approx 4 \times h$$

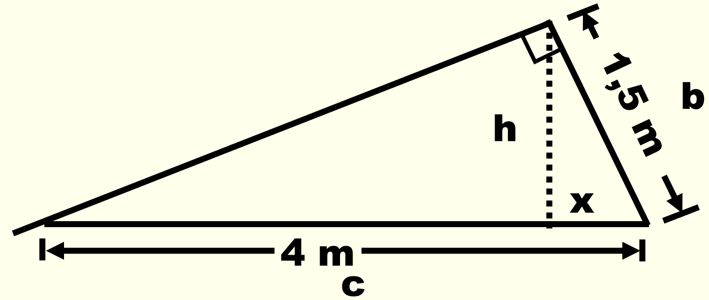
$$\frac{5{,}565}{4} \approx h$$

$$1{,}39 \approx h$$

$$h \approx 1{,}39 \text{ m}$$



Nous pourrions aussi utiliser cette relation :



$$b^2 = xc$$

$$1{,}5^2 = x \cdot 4$$

$$2{,}25 = x \cdot 4$$

$$0{,}5625 = x$$

Puis utiliser la relation de Pythagore :

$$h = \sqrt{b^2 - x^2}$$

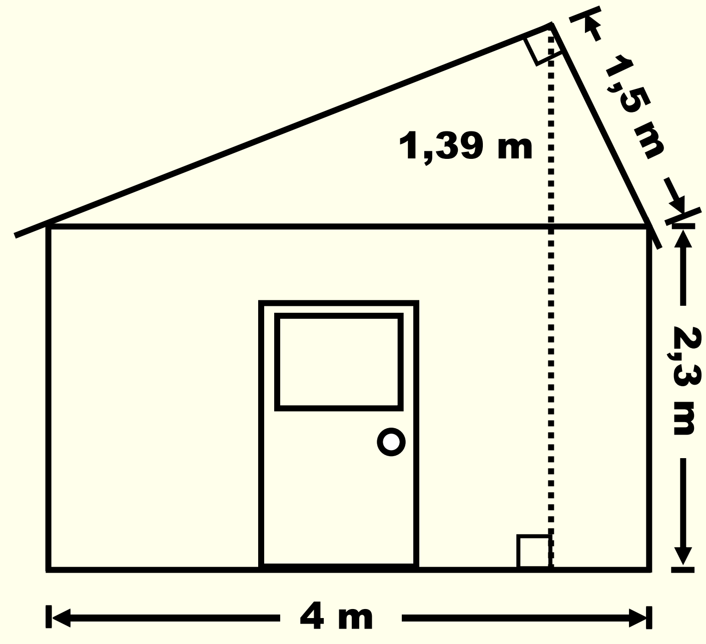
$$h = \sqrt{1{,}5^2 - 0{,}5625^2}$$

$$h \approx 1{,}39 \text{ m}$$

4) Additionnons les 2 hauteurs :

2,3 + 1,39 ≈ 3,69 m

Réponse : ≈ 3,69 m

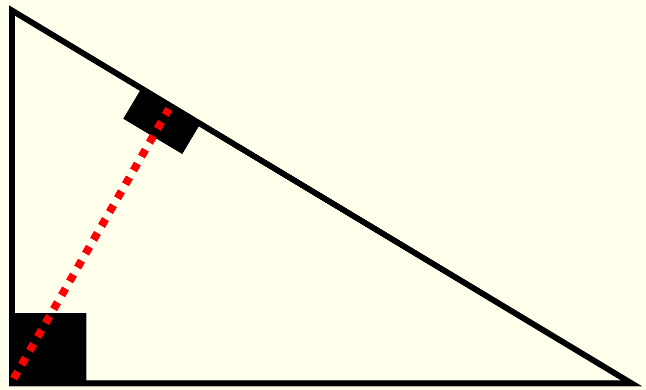


Les relations métriques que nous venons d'aborder sont très utiles pour déterminer des mesures de segments à l'intérieur des triangles rectangles.

Pour pouvoir utiliser ces 4 relations, il y a deux conditions à respecter :

- le triangle doit être rectangle;

- la hauteur doit être issue de l'angle de 90^0.



Pour bien choisir la bonne relation, il faut être capable de déterminer les segments homologues.

Pour t'aider, utilise les angles homologues, car les côtés homologues font face à ces angles homologues.

La relation de Pythagore, le triangle rectangle possédant un angle de 30^0, le triangle rectangle isocèle, etc., sont autant d'axiomes te permettant de déduire des mesures dans ce type de triangle.